EDU-04
PON 12

APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS PARA EL CÁLCULO DE LA CORRIENTE DE CC.

F Jurado Pérez, R. Acevedo Aranda, N. González Cabrera, J. Alfaro Rodriguez, A. Lozano Luna.
Deptos. De Ingeniería electromecánica, Ingeniería electrónica y Posgrado de Ingeniería Eléctrica

Abstract- *En el presente artículo se presenta la descripción de sistemas físicos a través del análisis de circuitos eléctricos por medio del uso de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de segundo orden, realizando así una analogía con un sistema mecánico. En el análisis de circuitos que implican capacitores e inductores depende de la formulación y la solución de la ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, dado que la presencia de estos dos elementos de almacenamiento dentro de un mismo circuito produce al menos un sistema de segundo orden, el cual está constituido por una ecuación de segundo orden o dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.*

Palabras clave: Capacitor, inductor, ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

I. Introducción

Una de las aplicaciones e importancia de las ecuaciones diferenciales en el estudio del corto circuito radica en el análisis de circuitos eléctricos en corriente directa CD, en donde la ecuación diferencial contiene derivadas o bien diferenciales, cuyas ecuaciones están definidas por su orden el cual hace la referencia a la derivada más alta contenida en ella, además de su grado, la cual es la potencia a la cual esta elevada, esto siempre y cuando la ecuación diferencial este dada en forma polinomial.

Al analizar circuitos eléctricos donde estén presentes elementos de almacenamiento como inductores y capacitores, además de resistencias, su análisis genera una ecuación diferencial de segundo orden, donde el aumento de orden hace necesario evaluar dos constantes arbitrarias generadas de dicho análisis. Además se requerirá determinar las condiciones iniciales, conociéndolas en algún instante de tiempo. En la práctica este instante de tiempo suele ser cuando se produce una conexión o desconexión de interruptores del circuito. Así de esta manera tales circuitos se denominan a menudo como circuitos RLC.

Dentro del análisis se genera una respuesta general la cual está compuesta por una respuesta natural, o bien transitoria más una respuesta forzada siendo esta de su parte estable [1].

RVP-AI/2015 ♦ EDU-04 PONENCIA RECOMENDADA POR EL COMITE EDUCACION DEL CAPITULO DE POTENCIA DEL IEEE SECCION MEXICO Y PRESENTADA EN LA REUNION INTERNACIONAL DE VERANO, RVP-AI/2015, ACAPULCO GRO., DEL 19 AL 25 DE JULIO DEL 2015.

La primera acción a desarrollar consiste en determinar la respuesta natural, para este caso se analiza un circuito sin fuente. Posteriormente dentro del circuito se pueden incluir fuentes de CD, interruptores o bien fuentes de escalón para que de esta manera se represente la respuesta total o general como la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada.

Un ejemplo clásico en circuitos de segundo orden son los circuitos RLC, en los cuales se observa la presencia de elementos pasivos y activos. El análisis de circuitos RLC consiste principalmente en considerar los circuitos excitados por las condiciones iniciales de los elementos de almacenamiento (capacitores e inductores). Aunque cabe mencionar que estos circuitos pueden contener fuentes dependientes, las cuales pueden estar dependiendo de una corriente de malla o voltaje, corriente de algún elemento. O bien en su mayoría de casos están presentes las fuentes independientes [2].

El análisis de circuitos que contengan fuentes independientes o bien dependientes se tratará como circuitos excitados, estos darán tanto la respuesta transitoria como la respuesta en estado estable. En dichos análisis también se pueden considerar, además de fuentes dependientes e independientes, fuentes sinodales y exponenciales [2,3].

Principalmente se inicia con la obtención de condiciones iniciales de corriente o carga, ya que es de vital importancia para la obtención de la ecuación diferencial de segundo orden que indicara el comportamiento de dicho sistema. Posteriormente al resolver dicha ecuación se pueden obtener unos de los tres casos en los que están regidos el comportamiento de dicho circuitos en CD, los casos son:

- Sobre-amortiguado.
- Críticamente amortiguado.
- Sub-amortiguado.

Aunado a dichas soluciones y análisis de los casos mencionados se comprueban con el uso de software de simulación, cotidiano y de fácil acceso como lo es MATLAB usando Simulink, donde se comprobara lo analítico con una simulación, para así de esta manera poder comparar y dar conclusiones [3,4].

II Análisis General.

Principalmente el análisis de circuitos en CD se comienza con la determinación de las condiciones iniciales respecto de una variable: corriente o tensión, respecto de la cual los elementos están en función en dicho circuito. Por conveniencia matemática, se considera casi siempre que la conexión o desconexión se produce en el instante $t=0$. Una vez realizada la conexión o desconexión, pueden aparecer nuevas tensiones y corrientes en el sistema, como resultado de los valores iniciales anteriores y debido a fuentes que se introducen o desaparecen. Existen dos puntos de vital importancia para la determinación de condiciones iniciales [3].

Primero, se debe mantener y manejar con sentido la polaridad de la tensión $V(t)$ en el capacitor y la dirección de la corriente $i(t)$ a través del inductor .

Segundo, tomar en cuenta que la tensión en el capacitor siempre es continua, y que la corriente en el inductor siempre es continua [4].

Así que una manera eficaz para la determinación de condiciones iniciales se enfoca en las variables que no pueden cambiar abruptamente, la tensión en el capacitor y la corriente del inductor.

Tomando en cuenta el circuito de la Figura 1 y considerando que $i(t)$ represente la corriente en el circuito eléctrico en serie *RLC* de dicha figura, las caídas de tensión a través de cada elemento (inductor, resistor y capacitor) y de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff, la suma de esas caídas es igual al voltaje $E(t)$ aplicado al circuito, por lo tanto se puede representar como [1]:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}q=E(t) \qquad \text{Ec. 1}$$

Pero $i=dq/dt$ relaciona la corriente $i(t)$ con la carga del capacitor $q(t)$, de manera que la ecuación (I) se transforma en la ecuación diferencial lineal de segundo orden.

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t) \qquad \text{Ec. 2}$$

La nomenclatura que se utiliza en el análisis de circuitos es análoga a la que se usa en los sistemas de resorte y masa de los sistemas mecánicos. En dado caso donde $E(t)=0$, las vibraciones eléctricas del circuito se llaman libres [1,3]. Por lo tanto, resolviendo la ecuación diferencial, existen varias formas interesantes de poder resolverla, en este apartado usaremos una transformación y eligiendo una m tal que esta sea una raíz de la ecuación cuadrática. Esta ecuación se llama ecuación característica o auxiliar de la ecuación diferencial de segundo orden 2 [3].

$$Lm^2+Rm+\frac{1}{C}=0 \qquad \text{Ec. 3}$$

Usando esta ecuación característica o bien auxiliar para su solución, obtendremos tres formas de la solución siempre y cuando $R\neq 0$, dependiendo del valor del discriminante $R^2\text{-}4L/C$. se dice que el circuito es [1]:

- **Sobre-amortiguado** si $R^2-4L/C > 0$
- **Críticamente amortiguado** si $R^2-4L/C = 0$
- **Sub-amortiguado si** $R^2-4L/C < 0$

Al resolver la ecuación característica se obtendrán dos valores de la ecuación los cuales se denominan raíces por lo que, si los valores de las raíces son reales y distintas al sistema se le conoce como sistema sobre-amortiguado, pero si los valores de las raíces son complejas conjugadas (imaginarias) es un sistema sub-amortiguado y al ser los valores de las raíces iguales el sistema presente es críticamente amortiguado [3].

En cada uno de los tres casos presentes, la solución de la ecuación diferencial 2 contendrá el factor $e^{-Rt/2L}$, así que $q(t)\rightarrow 0$ cuando $t\rightarrow\infty$. En el caso sub-amortiguado, cuando $q(0)=q_0$, la carga en el capacitor oscila según esta decrece. En otras palabras, el capacitor se carga y descarga cuando $t\rightarrow\infty$. Cuando $E(t)=0$ y $R=0$, se dice que el circuito es no amortiguado y por lo tanto las vibraciones eléctricas no tienden a cero conforme aumenta t sin límite, por lo tanto la respuesta del circuito será armónica simple o movimiento libre no amortiguado [1].

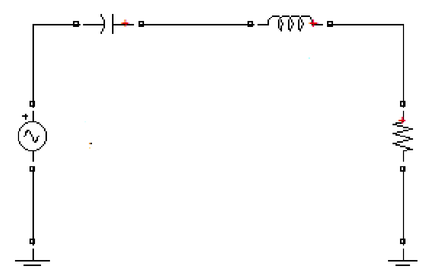

Figura 1 Circuito típico de estudio.

Al obtener los dos valores de las raíces de la solución de la ecuación diferencial de segundo orden, estos dos valores se denominan frecuencias naturales, medidas en nepers por segundo (Np/s), ya que estas están asociadas a la respuesta natural del circuito. Así como la frecuencia resonante, o más estrictamente como frecuencia natural no amortiguada *(w_0)* expresada en radianes por segundo *(rad/s)* y además la frecuencia neperiana o bien el factor de amortiguamiento *(α)*, expresada en nepers por segundo [2].

$$\propto=\frac{R}{2L} \qquad \text{Ec. 4}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{Ec. 5}$$

De esta forma estas ecuaciones o bien expresiones matemáticas son las que describen el comportamiento de un circuito en CD.

Otra nomenclatura para identificar la ecuación diferencial para poder manipular el análisis de un circuito eléctrico es la siguiente:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\propto\frac{dy(t)}{dt}+\omega a^2y(t)=0 \qquad \text{Ec. 6}$$

Lo cual su solución resulta:

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Donde el valor de nuestros radicales nos indicaran el tipo de sistema:

$S_1 = -\propto -\sqrt{\propto^2 - \omega a^2}$

$S_2 = -\propto +\sqrt{\propto^2 - \omega a^2}$

Por lo tanto:

Si $\propto > \omega a$ si S_1 y S_2 son reales y distintos obtenemos el sistema sobre-amortiguado.

Si $\propto < \omega a$ S_1 y S_2 son complejos conjugados y se le conoce como sistema sub-amortiguado.

Si $\propto = \omega a$ obtenemos un sistema críticamente amortiguado.

Siendo esta nomenclatura la cual predominara en el análisis de circuitos en dicho trabajo [2,5].

III sistema sobre-amortiguado.

En este caso, el radical utilizado para obtener la solución de la ecuación diferencial o bien las raíces de este mismo serán reales y distintas, por lo que R^2*-4L/C > 0*.

De tal manera la repuesta que se obtendrá del análisis de circuito se expresara como la suma algebraica de dos términos exponenciales decrecientes los cuales tienden a ser cero conforme el tiempo aumenta. En realidad, ya que el valor absoluto de uno de los valores del radical será mayor que el otro, el termino mayor tendrá una tasa de reducción más rápida [1].

Considerando el circuito de la Figura 2, el cual es un circuito RLC en serie. Obtener *i(t)*, si *R=5Ω, L=1/2H, C=1/8F* y las condiciones iniciales son $i_L(0)=1A$, $V_C(0)=2V$.

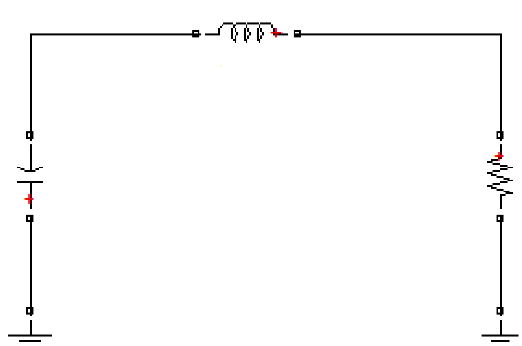

Figura 2 Circuito RLC en serie.

Teniendo en cuenta que *i(t)* es la corriente que circula en la malla del circuito, podemos deducir lo siguiente:

$i(t)=i_R(t)=i_C(t)=i_L(t)$

Aplicando ley de voltajes de Kirchhoff a lo largo de la malla:

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

Sabiendo y haciendo la similitud de la ecuación diferencial anterior con la Ec.6:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\propto\frac{dy(t)}{dt} + \omega a^2 y(t) = 0$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$$

Sustituyendo datos en ecuación anterior:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 10\frac{di(t)}{dt} + 16i(t) = 0$$

Donde:

$2\alpha = 10$ por lo tanto $\alpha = 5$
$\omega_a^2 = 16$ por lo tanto $\omega_a = 4$

Solución de radicales:

$S_1 = -5 - \sqrt{5^2 - 4^2} = -2$
$S_1 = -5 + \sqrt{5^2 - 4^2} = -8$

Solución:

$i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t}$ Ec. A

Posteriormente se determinan el valor de las constantes:
Evaluando Ec. A en t=0.

$$i(0) = A_1 + A_2$$

$1 = A_1 + A_2$ Ec. B

Por lo tanto derivando Ec.A:

$$\frac{di(t)}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 8A_2 e^{-8t}$$

Posteriormente evaluando la derivada en t=0.

$$\frac{di(t)}{dt} = -2A_1 - 8A_2$$

Por lo tanto:

$-14 = -2A_1 - 8A_2$ Ec.C

Resolviendo nuestro sistema de ecuaciones B y C, obtenemos el valor de las constantes:

$$A_1 = -1 \qquad A_2 = 2$$

Siendo la respuesta general de nuestro circuito:

$$i(t) = -1e^{-2t} + 2e^{-8t}$$

Con esta respuesta obtenida se obtiene la comprobación que el resultado obtenido es la suma de dos exponenciales, donde tenemos los resultados de nuestros radicales siendo estos reales y distintos [1-4].

IV Críticamente amortiguado.

En este caso, el valor de nuestros radicales nos resultara siendo raíces reales e iguales, siendo esta última la solución de la ecuación diferencial. Por lo que se obtendrá lo siguiente $R^2\text{-}4L/C = 0$.

Como las dos raíces son iguales, sólo existe una constante indeterminada, pero sigue habiendo dos condiciones iniciales por satisfacer. Por tanto la ecuación diferencial no es la solución total para el régimen libre de un circuito críticamente amortiguado.

De igual forma que el caso mostrado con anterioridad del sistema expresaremos la respuesta del análisis como una suma de exponenciales, siendo sus elevados reales e iguales. Sin embargo se obtendría una ligera mejora es decir reducción del tiempo de establecimiento mediante un pequeño aumento de la resistencia [3].

Donde su representación gráfica muestra un decrecimiento del sistema el cual presenta una característica muy peculiar y única el cual este sistema no presenta oscilaciones.

V Sub-amortiguado.

Cuando la solución de los radicales genera raíces complejas conjugadas (imaginarias), se trata de un sistema sub-amortiguado. Donde $R^2\text{-}4L/C < 0$, la generación de ello nos generara dicho resultado.

Si se aumenta el valor de R, se logra que el coeficiente de amortiguamiento α disminuya mientras que ω permanece constante, la ecuación característica o bien auxiliar del circuito RLC en paralelo tendrá dos raíces complejas cuando α > ω esto se cumple cuando:

$$LC < (2RC)^2$$

$$L < 4R^2C$$

Las raíces complejas dan lugar a una respuesta de tipo oscilatorio. Recibiendo el nombre de frecuencia resonante amortiguada. Entonces la respuesta grafica de dicho análisis de sistema nos generara un comportamiento oscilatorio [5].
La respuesta natural del presente sistema sub-amortiguado es oscilatoria con magnitud decreciente. La frecuencia de oscilación depende de ω y la rapidez de decrecimiento.

VI Simulación de Sistemas Eléctricos.

Un sistema eléctrico se puede modelar y simular con algún software en este caso en particular mediante el simulink mediante dos formas:

A partir de sus ecuaciones diferenciales con las herramientas generales de Simulink. Aplicando una librería especifica de Simulink llamada SimPowerSystem donde se encuentran ya desarrollados los principales componentes de un sistemas eléctrico o bien los componentes a usar en dicho circuito. Con esto se pretende dar una visión o perspectiva informática para la manipulación de dichos sistemas, haciendo uso de una de las dos aplicaciones mencionadas anteriormente. Para el caso de estudio se enfoca en la segunda aplicación teniendo como ventajas lo siguiente:

Dado que no es necesario precisar las ecuaciones diferenciales que estarán rigiendo el sistema eléctrico, solo será necesario simular el circuito, una desventaja de ello sería que los iconos de dicha librería no nos permiten ver o darnos cuenta de las ecuaciones que se están usando y el significado correcto de sus parámetros.

Principalmente de la librería de Simulink compuesta por iconos con la librería de Simscape. En la figura 3 se muestra la pantalla principal de la librería del programa de donde los bloques nos permiten simular un circuito partiendo de sus componentes eléctricos y no de sus expresiones matemáticas.

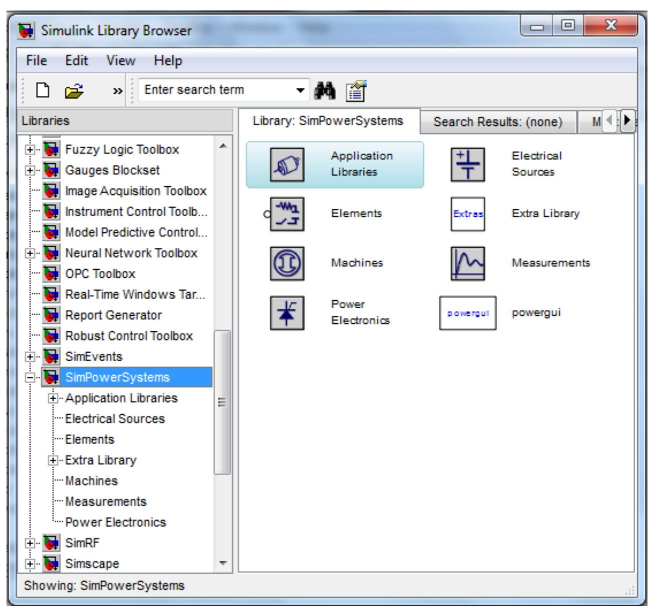

Figura 3 Pantalla general de librería.

Este circuito se simula en segundo plano y será posible obtener sus variables del mismo usando voltímetros o bien amperímetros. Se desarrolla el planteamiento del circuito simple RLC en paralelo usando la librería de SimPowerSystem.

Mediante la simulación con el apoyo de la librería y se obtienen los datos con medidores adecuados ya sea de voltaje o bien de intensidad, los cuales se extraen de la librería.

Dentro de la hoja de trabajo el icono de powergui es fundamental para la manipulación de la simulación de nuestro sistema eléctrico, sin él no se puede llevar acabo el desarrollo de la simulación. En la Figura 4 se puede observar el bloque de powergui. Así como la implementación de los bloques para el armado del caso.

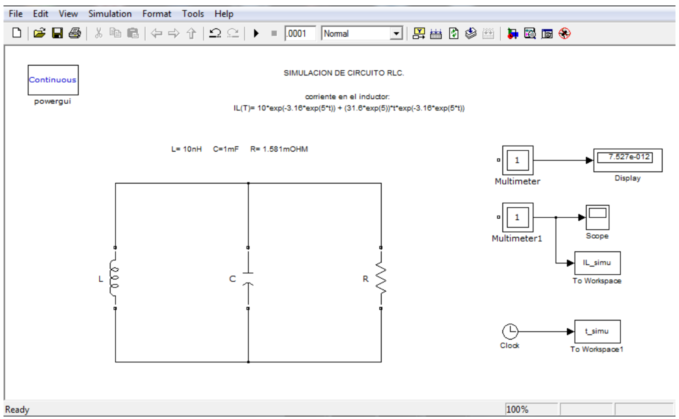

Figura 4 Simulación de sistema eléctrico.

Dentro de la simulación del sistema eléctrico se designan los parámetros a cada elemento dentro del sistema tal cual sus condiciones iniciales. Teniendo así la definición completa de cada elemento con los componentes que se requieren analizar en las mediciones, de voltaje, corriente, además del componente Scope. La figura 5 muestra la gráfica de la onda captada en el momento de la simulación del sistema.

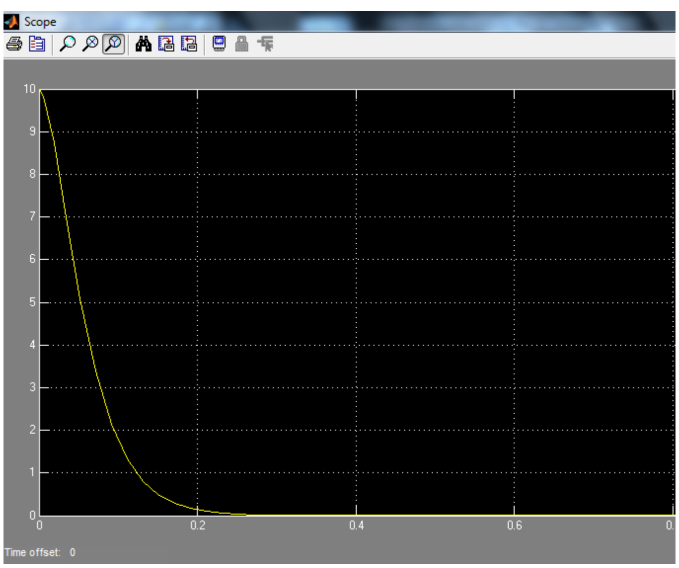

Figura 5 Resultado grafico de sistema eléctrico.

En la pantalla principal del programa Command window se desarrolla la parte de programación para ejecutar el caso de estudió como se puede apreciar en la Figura 6.

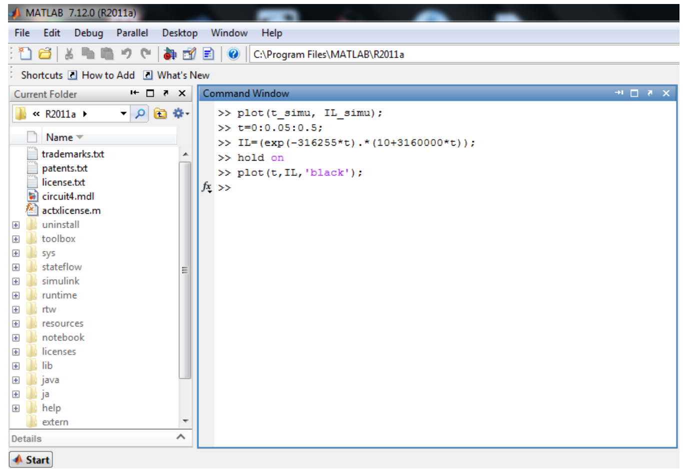

Figura 6 Comprobación de sistema eléctrico.

Y finalmente se obtuvo así la gráfica del sistema, mediante el desarrollo de la implementación del sistema en el simulink y así como en la programación del mismo. En la Figura 7 se puede apreciar la onda del sistema.

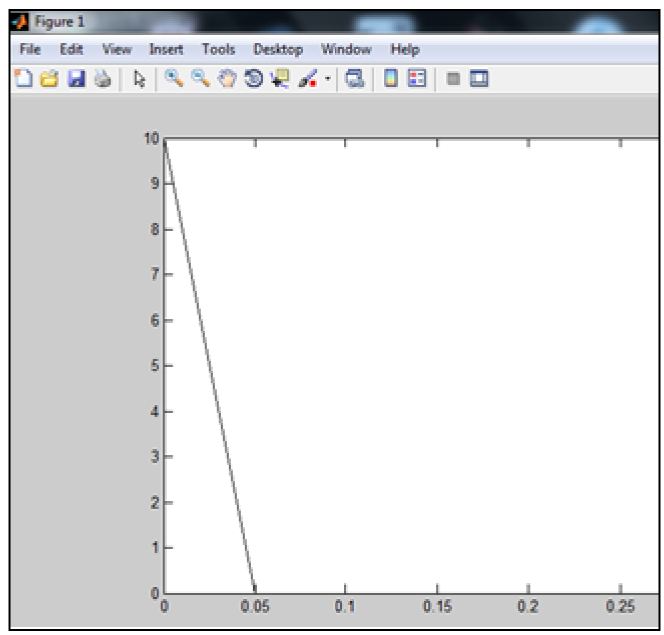

Figura 7 Obtención de la gráfica de sistema eléctrico.

VII Conclusiones.

La aplicación de las ecuaciones diferenciales son una gran herramienta, fundamental y eficaz para el análisis de sistemas ya sea mecánicos, eléctricos fortalecen de manera precisa y puntual el desarrollo y el comportamiento de un sistema a base de una ecuación diferencial, en la cual su resultado genera un sistema del comportamiento del circuito. Si bien sus vibraciones eléctricas. Además la simulación con el apoyo de un software son indispensables para la modelación de circuitos eléctricos usando sus componentes para la aplicación de las funciones matemáticas. Además de que nos permite la simulación en continuo, de forma discreta, por lo cual permite la linealidad de los sistemas modelados. El uso de este software es de impacto industrial como educacional.

REFERENCIAS

Fernando Jurado Pérez. Esta con el departamento de ingeniería electromecánica y el posgrado de ingeniería eléctrica del Instituto Tecnológico Superior de Irapuato (ITESI) desde el 2006.

Néstor González Cabrera Esta con el departamento de ingeniería electromecánica y el posgrado de ingeniería eléctrica del Instituto Tecnológico Superior de Irapuato (ITESI) desde el 2011.

Jose Juan Alfaro Rodriguez Esta con el departamento de ingeniería electrónica del Instituto Tecnológico Superior de Irapuato (ITESI) desde el 2005.

Alfonso Lozano Luna Esta con el departamento de ingeniería electromecánica del Instituto Tecnológico Superior de Irapuato (ITESI) desde el 2006.

Rogelio Acevedo Aranda Estudiante de la carrera de ingeniería electromecánica del Instituto Tecnológico Superior de Irapuato.

[1] **Dennis G. Zill. (**1998): Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Sexta edición. Electro-comp, S.A de C.V. México, D.F. cap. 5, pp. 195-213.

[2] **William H. Hayt, jr. Jack E. Kemmerly. Steven M.Durbin.** Análisis de circuitos en ingeniería. Séptima edición. Mac graw hill. México, D.F. cap. 9, pp. 319-349.

[3] **Dennis G. zill. Michael R. Cullen.** Matemáticas avanzadas para ingeniería, vol. 1. Ecuaciones diferenciales. Tercera edición. Mc graw hill. Mexico, D.F. cap. 3, pp.104-159.

[4] **Murray R. Spiegel.** (1983**):** Ecuaciones diferenciales aplicadas. Tercera edición. Prentice-hall. S.A. Mexico, D.F. cap. 3, pp. 84-88.

[5] **Isabel Carmona Jover**. (1985): Ecuaciones diferenciales. Primera edición. Alhambra, S.A. México, DF. Cap. 5, pp. 298-302.